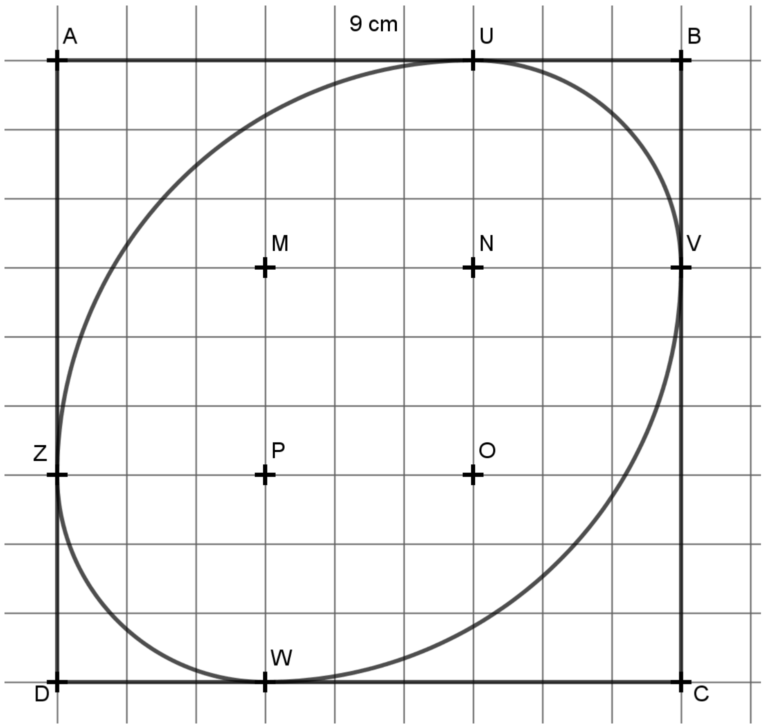
Concours René Merckhoffer 2019
Olympiades de quatrième
Corrigé

Exercice 1 La persistance d'un nombre

1) a) $77 \rightarrow 7\times 7=49 \rightarrow 4\times 9=36 \rightarrow 3\times 6=18 \rightarrow 1\times 8=8$
Il y a quatre étapes, la persistance est donc 4.
b) $28534 \rightarrow 2\times 8\times 5\times 3\times 4=960 \rightarrow 9\times 6\times 0=0$
Il y a deux étapes, la persistance est donc 2.
c) $6\,785\,791 \rightarrow 6\times 7\times 8\times 5\times 7\times 9\times 1=105\,840 \rightarrow 1\times 0\times 5\times 8\times 4\times 0=0$
Il y a deux étapes, la persistance est donc 2.
2) Si l'un des chiffres est 0, le produit est nul.
La suite des produits s'arrête dès qu'il y a un zéro parmi les chiffres.
3) Le produit d'un nombre par 1 ne change pas ce nombre.
On ne change pas la persistance si on insère un 1 dans l'écriture du nombre.
4) Le nombre 77 111 111 111 111 111 111 s'écrit avec 20 chiffres.
Sa persistance est 4, comme le nombre 77.
5) Deux cas possibles :
- si le nombre de départ comporte un zéro, sa persistance est 1 car le produit des chiffres est égal à zéro.
- si le nombre de départ ne comporte pas de zéro mais comporte un 5 et un chiffre pair, alors le produit de ses chiffres sera un multiple de 10 car le produit de 5 par un nombre pair est un multiple de 10. Or les multiples de 10 finissent tous par le chiffre 0. Si on multiplie donc les chiffres d'un multiple de 10, le résultat sera 0, et la persistance du nombre de départ sera égale à 2.

Exercice 2 La mosaïque de Penthée

1) L'ovale est constitué de l'arc de cercle de centre M d'extrémités V et W, de l'arc de cercle de centre N et d'extrémités U et V, de l'arc de cercle de centre O et d'extrémités Z et U et de l'arc de centre P et d'extrémités W et Z.

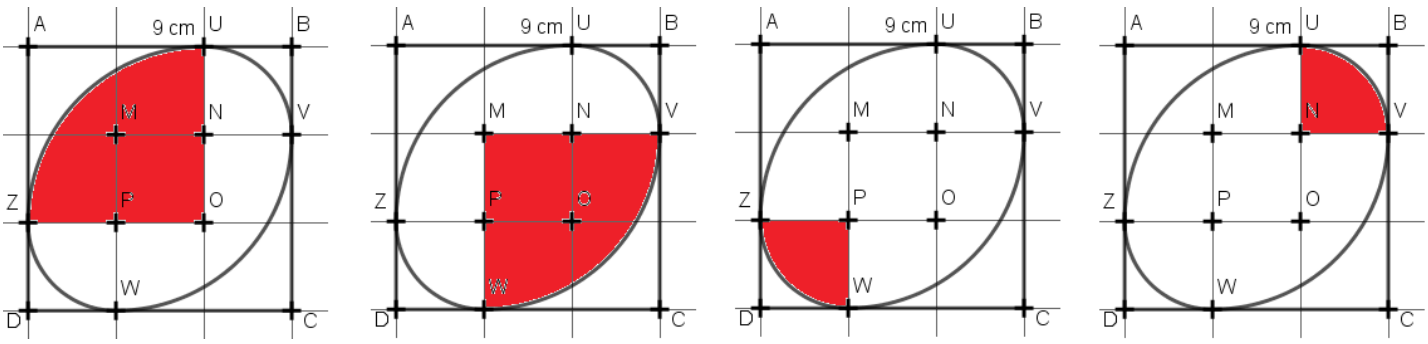


2) *(figure à construire)*
Le carré doit avoir un côté de 9 cm.

3) *Rappel : périmètre d'un cercle*
$$P=2\times\pi\times R$$
Il y a deux quarts de cercle de rayon 1 unité, ce qui fait l'équivalent d'un demi-cercle de rayon 1 unité :
$$P_1=(2\times\pi\times R_1)\div 2$$
$$P_1=(2\times\pi\times 1)\div 2$$
$$P_1=\pi\, unités$$
Il y a deux quarts de cercle de rayon 2 unités, ce qui fait l'équivalent d'un demi-cercle de rayon 2 unités :
$$P_2=(2\times\pi\times R_2)\div 2$$
$$P_2=(2\times\pi\times 2)\div 2$$
$$P_2=2\pi\, unités$$
Soit au total : $P=\pi+2\pi=3\pi\, unités$
Si on veut le résultat en centimètres pour la figure que l'on a tracée, cela fait :
$$P=3\pi\times 3\, cm$$
$$P=9\pi\, cm$$
$$P\approx 28{,}3\, cm$$

4) Rappel : Aire d'un disque $A=\pi\times R\times R$

On peut décomposer la figure ainsi :



La surface de l'ovale peut être décomposée en deux quarts de cercle de rayon 1 unités et en deux quarts de cercle de rayon 2 unités partiellement superposés (la partie commune étant un carré de côté 1 unité). On peut donc calculer l'aire de la façon suivante :

$$A=(\text{Aire d'un demi-disque de rayon 1})+(\text{Aire d'un demi-disque de rayon 2})-(\text{Aire d'un carré de côté 1})$$

$$A=(\pi\times R_1\times R_1)\div 2+(\pi\times R_2\times R_2)\div 2-(c\times c)$$

$$A=(\pi\times 1\times 1)\div 2+(\pi\times 2\times 2)\div 2-(1\times 1)$$

$$A=\pi\div 2+\pi\times 2-1$$

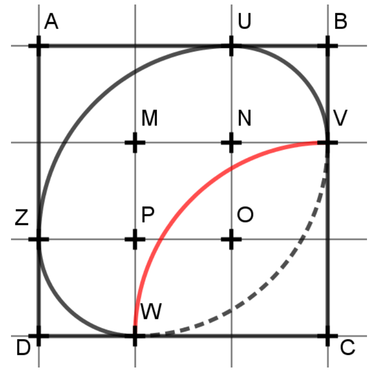
$$A=\frac{5}{2}\pi-1\ \textit{unités d ' aire}$$

Si on veut le résultat en centimètres pour la figure que l'on a tracée, cela fait :

$$A=(\frac{5}{2}\pi-1)\times 9\quad \text{car 1 unité d'aire}=9\,cm^2$$

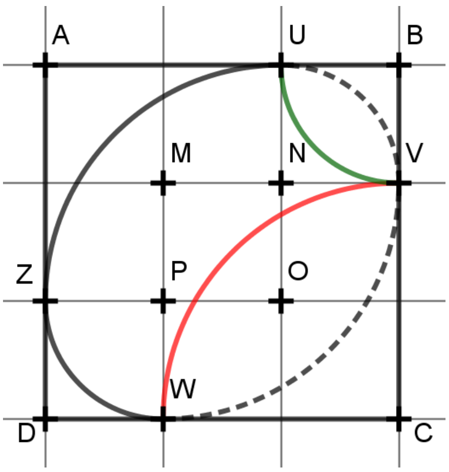
$$A=\frac{45}{2}\pi-9$$

$$A\approx 61{,}7\,cm^2$$

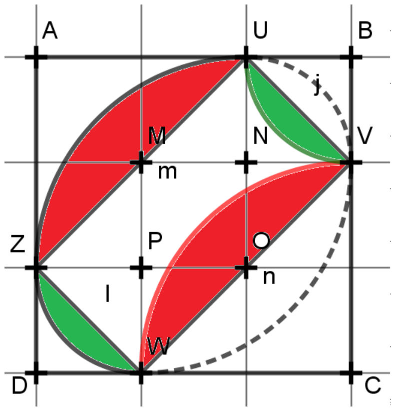


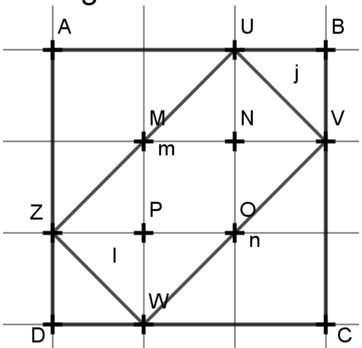
5) Pour que la figure ait le même périmètre, on peut par exemple remplacer l'arc de cercle d centre M par un arc de même rayon et de centre C. On obtient la figure ci-contre.
Le périmètre est inchangé et l'aire diminue de la surface comprise entre les deux arcs, l'ancien et le nouveau.

6) On peut par exemple construire la figure suivante :



On procède comme dans la question précédente en remplaçant aussi l'arc de cercle de centre N par un arc de même rayon et de centre B.
Ainsi, le périmètre est inchangé car la figure est toujours constituée de deux quarts de cercle de rayon 1 unité et de deux quarts de cercle de rayon 2 unités.
Vérifions que l'aire est bien égale à 4.
Les aires des surfaces vertes et des surfaces rouges se compensent.
L'aire de la figure est donc égale à l'aire du rectangle suivant :





Ce rectangle est composé d'un carreau et de 6 demi-carreaux, ce qui équivaut à 4 carreaux, soit 4 unités d'aire.

Exercice 3 Code EAN

1) S = $4+7+8+0+8+8+3\times(9+1+5+1+7+2)=35+3\times25=35+75=110$

$110+0=110$ et 110 est bien un multiple de 10.

2) S = $9+8+0+7+2+5+3\times(7+2+4+3+8+0)=31+3\times24=31+72=103$

$103+7=110$

Il faut ajouter 7 pour obtenir un multiple de 10, donc C = 7

3)

$S=3+5+5+7+4+7+3\times(2+2+x+0+1+6)$

$S=31+3\times(11+x)$

$S=31+3\times11+3\times x$

$S=31+33+3x$

$S=64+3x$

Si on additionne 7 à ce résultat, on obtient un multiple de 10.

Donc $64+3x+7=71+3x$ est un multiple de 10.

Le nombre qui convient est $x=3$ car $71+3\times3=71+9=80$

4) Appelons x le premier chiffre et y le deuxième chiffre. Le code est $xy42278085958$.

$S=x+4+2+8+8+9+3\times(y+2+7+0+5+5)$

$S=x+31+3\times(y+19)$

$S=x+31+3\times y+3\times19$

$S=x+31+3y+57$

$S=x+3y+88$

Si on additionne 8, on doit obtenir un multiple de 10.

Donc $x+3y+88+8=x+3y+96$ est un multiple de 10.

$x+3y$ finit donc par le chiffre 4, cela peut être : 4, 14, 24, 34 (x et y sont des chiffres donc ça ne peut pas être plus grand)

► si $x+3y=4$, alors soit $x=1$ et $y=1$ donc les deux premiers chiffres sont "11".
soit $x=4$ et $y=0$ donc les deux premiers chiffres sont "40".

► si $x+3y=14$, alors soit $x=2$ et $y=4$ donc les deux premiers chiffres sont "24".
soit $x=5$ et $y=3$ donc les deux premiers chiffres sont "53".
soit $x=8$ et $y=2$ donc les deux premiers chiffres sont "82".

► si $x+3y=24$, alors soit $x=0$ et $y=8$ donc les deux premiers chiffres sont "08".
soit $x=3$ et $y=7$ donc les deux premiers chiffres sont "37".
soit $x=6$ et $y=6$ donc les deux premiers chiffres sont "66".
soit $x=9$ et $y=5$ donc les deux premiers chiffres sont "95".

► si $x+3y=34$, alors soit $x=7$ et $y=9$ donc les deux premiers chiffres sont "79".

37 peut donc être remplacé par : 11, 40, 24, 53, 82, 08, 37, 66, 95, 79

Exercice 4 Six demi-cercles

Le domaine peut être partagé ainsi :

- six quarts de disque de rayon 1 (en bleu)
- trois rectangles de longueur 2 et de largeur 1 (en rouge)

On a donc :

$A=6\times\frac{A_{disque}}{4}+3\times A_{rectangle}$

$A=6\times\frac{\pi\times R\times R}{4}+3\times L\times l$

$A=6\times\frac{\pi\times1\times1}{4}+3\times2\times1$

$A=\frac{6}{4}\times\pi+6$

$A=\frac{3}{2}\times\pi+6$